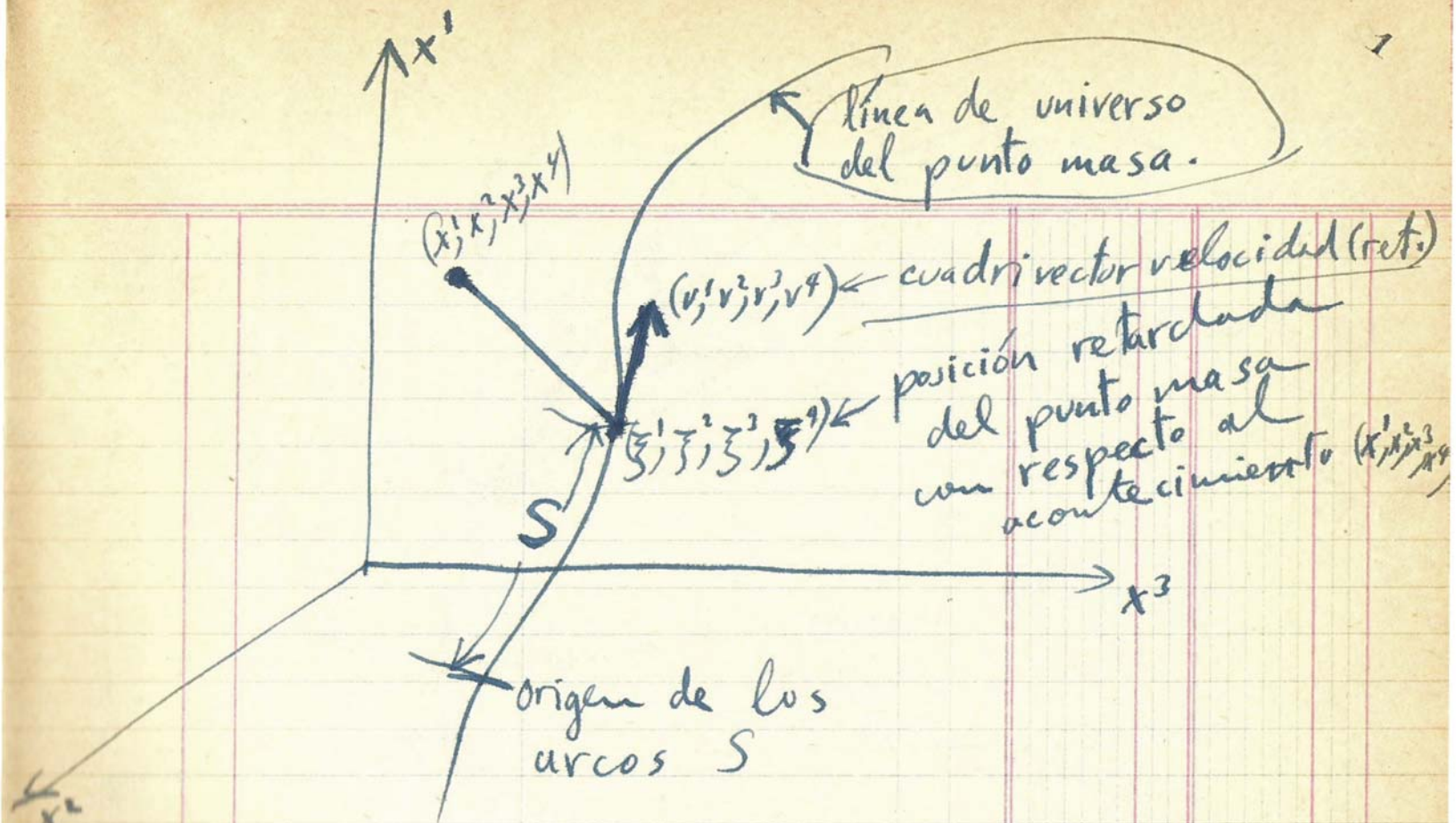

Cuaderno de notas de trabajo

Carlos Graef Fernández

Cuaderno 15



$$z^i = z^i(s);$$

$$v^i = v^i(s);$$

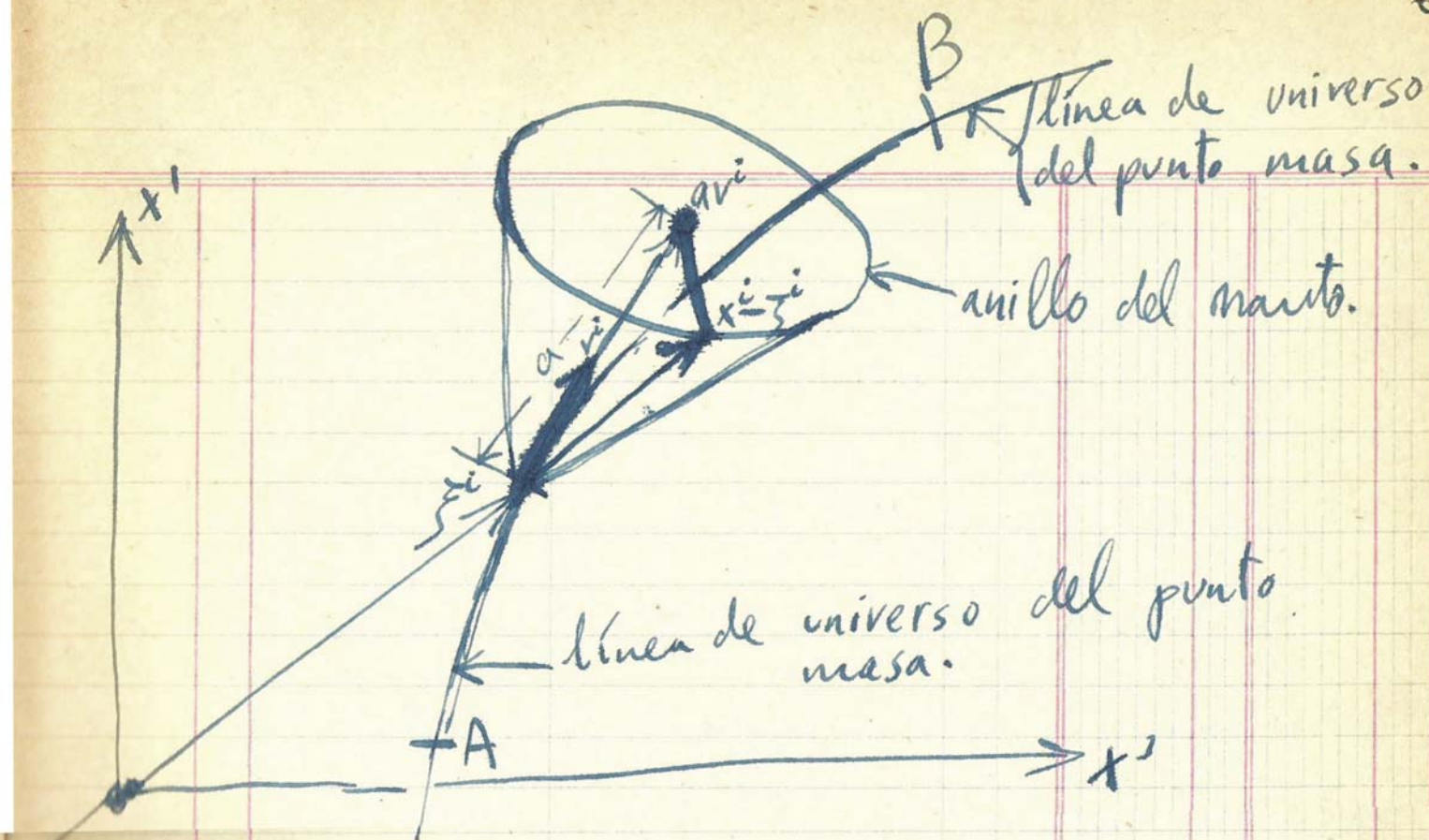
$$\boxed{v^i v_i = 1}$$

El cuadri vector velocidad es unitario.

$$\boxed{\frac{d}{ds} = \cdot}; \text{Notación!}$$

$$\boxed{\dot{z}^i = v^i}$$

Problema: ~~expresar~~ encontrar las ecuaciones paramétricas de la ~~sea~~ hipersuperficie definida como sigue:



- 1) Constrúyase el cono de luz del futuro con vértice en el punto z^i acontecimiento z^i .
- 2) Córtese ese cono de luz con un hiperplano $\perp$ al cuadriector v^i y apoyado en el punto $z^i + a^i$.
- 3) La intersección de hiperplano y cono de luz del futuro es una esfera S^3 .
- 4) Considérese la hipersuperficie formada por una esfera S^3 deslizante cuando z^i va de A a B. A esta hipersuperficie se le llamará "manto".

Considérense tres cuadrivectores unitarios:

$$l^1, l^2, l^3, l^4;$$

$$m^1, m^2, m^3, m^4;$$

$$n^1, n^2, n^3, n^4;$$

que formen con el cuadrivector
velocidad v^1, v^2, v^3, v^4 una tétrada
de cuadrivectores normales y ortogonales

$$l^i m_i = l^i n_i = l^i v_i = m_i n^i = m_i v^i = n^i v_i = 0$$

$$l^i l_i = m^i m_i = n^i n_i = v^i v_i = 1.$$

El manto tiene por ecuaciones paramétricas:

$$x^i = z^i + a v^i + a \sin \theta \cos \varphi l^i + a \sin \theta \sin \varphi m^i + a \cos \theta n^i.$$

Aquí: $z^i = z^i(S); \quad v^i = v^i(S) = \dot{z}^i;$

$$l^i = l^i(S);$$

$$m^i = m^i(S);$$

$$n^i = n^i(S).$$

Los parámetros del manto son: S, θ, φ .

Problema: Valuar el cuadrivector elemento
de Volumen del manito definido por

$$x^i = \xi^i + a v^i + a \sin \theta \cos \varphi l^i + a \sin \theta \sin \varphi m^i + a \cos \theta n^i;$$

$$\xi^i = \xi^i(s);$$

$$v^i = v^i(s) = \dot{\xi}^i;$$

$$l^i = l^i(s);$$

$$m^i = m^i(s);$$

$$n^i = n^i(s).$$

$$x^i = x^i(s, \theta, \varphi).$$

Los cuadrivectores v^i , l^i , m^i y n^i forman
una tétrada de ~~cuadrivectores~~ vectores normales
y ortogonales.

$$dV_1 = ds d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{1}{\dot{x}^2} + \overset{2}{a\dot{v}^2} + a \sin\theta \cos\varphi \overset{3}{\dot{l}^2} + a \sin\theta \sin\varphi \overset{4}{\dot{m}^2} + a \cos\theta \overset{5}{\dot{n}^2} \\
 & 0 + a \cos\theta \cos\varphi \dot{l}^2 + a \cos\theta \sin\varphi \dot{m}^2 - a \sin\theta \dot{n}^2 \\
 & 0 + -a \sin\theta \sin\varphi \dot{l}^2 + a \sin\theta \cos\varphi \dot{m}^2 + 0
 \end{aligned}$$

$$dV_1 = \dot{x}^2 + a\dot{v}^2$$

$$dV_1 = \left[\begin{array}{cccc}
 \cancel{111} + \cancel{112} + \cancel{113} + \cancel{114} \\
 \cancel{121} + \cancel{122} + \boxed{123} + \cancel{124} \\
 \cancel{131} + \cancel{132} + \cancel{133} + \cancel{134} \\
 \cancel{141} + \cancel{142} + \cancel{143} + \cancel{144} \\
 \hline
 \cancel{211} + \cancel{212} + \cancel{213} + \cancel{214} \\
 \cancel{221} + \cancel{222} + \cancel{223} + \cancel{224} \\
 \cancel{231} + \cancel{232} + \cancel{233} + \cancel{234} \\
 \cancel{241} + \cancel{242} + \cancel{243} + \cancel{244} \\
 \hline
 \cancel{311} + \boxed{\cancel{312}} + \cancel{313} + \cancel{314} \\
 \cancel{321} + \cancel{322} + \cancel{323} + \cancel{324} \\
 \cancel{331} + \cancel{332} + \cancel{333} + \cancel{334} \\
 \cancel{341} + \cancel{342} + \cancel{343} + \cancel{344} \\
 \hline
 \cancel{411} + \cancel{412} + \cancel{413} + \cancel{414} \\
 \cancel{421} + \cancel{422} + \cancel{423} + \cancel{424} \\
 \cancel{431} + \cancel{432} + \cancel{433} + \cancel{434} \\
 \cancel{441} + \cancel{442} + \cancel{443} + \cancel{444}
 \end{array} \right]$$

$$dV_i = \begin{vmatrix} \ddot{z}^i + a\ddot{v}^i + a\sin\theta\cos\varphi\ddot{l}^i + a\sin\theta\sin\varphi\ddot{m}^i + a\cos\theta\ddot{n}^i \\ 0 + a\cos\theta\cos\varphi\ddot{l}^i + a\cos\theta\sin\varphi\ddot{m}^i - a\sin\theta\ddot{n}^i \\ 0 - a\sin\theta\sin\varphi\ddot{l}^i + a\sin\theta\cos\varphi\ddot{m}^i + 0 \end{vmatrix} \frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{v}^3 + a\sin\theta\cos\varphi\ddot{l}^3 + a\sin\theta\sin\varphi\ddot{m}^3 + a\cos\theta\ddot{n}^3 \quad \ddot{z}^4 + a\ddot{v}^4 + a\sin\theta\cos\varphi\ddot{l}^4 + \dots \\ & 0 + a\cos\theta\cos\varphi\ddot{l}^3 + a\cos\theta\sin\varphi\ddot{m}^3 - a\sin\theta\ddot{n}^3 \quad 0 + a\cos\theta\cos\varphi\ddot{l}^4 + \dots \\ & 0 + -a\sin\theta\sin\varphi\ddot{l}^3 + a\sin\theta\cos\varphi\ddot{m}^3 + 0 \quad 0 + -a\sin\theta\sin\varphi\ddot{l}^4 + \dots \end{aligned}$$

$$123 = \begin{vmatrix} \ddot{z}^2 + a\ddot{v}^2 & a\cos\theta\cos\varphi\ddot{l}^3 & a\cos\theta\sin\varphi\ddot{m}^4 \\ -a\sin\theta\sin\varphi\ddot{l}^3 & a\sin\theta\cos\varphi\ddot{m}^4 \end{vmatrix}$$

$$123 = (\ddot{z}^2 + a\ddot{v}^2) a^2 \sin\theta \cos\theta \ddot{l}^3 \ddot{m}^4$$

$$124 = \begin{vmatrix} \ddot{z}^2 + a\ddot{v}^2 & a\cos\theta\cos\varphi\ddot{l}^3 & -a\sin\theta\ddot{n}^4 \\ -a\sin\theta\sin\varphi\ddot{l}^3 & 0 & \ddot{n}^4 \end{vmatrix}$$

$$124 = -(\ddot{z}^2 + a\ddot{v}^2) a^2 \sin^2\theta \sin\varphi \ddot{l}^3 \ddot{n}^4$$

$$dV_1 = dS d\theta d\varphi \left| \begin{array}{l} \dot{x}^2 + a^2 \dot{r}^2 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{l}^2 + a \sin \theta \sin \varphi \dot{m}^2 + a \cos \theta \dot{n}^2 \\ a \cos \theta \cos \varphi \dot{l}^2 + a \cos \theta \sin \varphi \dot{m}^2 - a \sin \theta \dot{n}^2 \\ - a \sin \theta \sin \varphi \dot{l}^2 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{m}^2 \end{array} \right|$$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$	Cofactor de a es	A
	Cofactor de b es	B
	Cofactor de c es	C

$$A = (a \cos \theta \cos \varphi \dot{l}^3 + a \cos \theta \sin \varphi \dot{m}^3 - a \sin \theta \dot{n}^3) (-a \sin \theta \sin \varphi \dot{l}^4 + a \cos \theta \cos \varphi \dot{m}^4 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{n}^4)$$

$$A = \dot{l}^3 \dot{l}^4 (-a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi) + \dot{m}^3 \dot{l}^4 (-a^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - a^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi) + \dot{n}^3 \dot{m}^4 (-a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi) + \dot{m}^3 \dot{n}^4 (a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi)$$

$$-a \sin \theta \cos \varphi \dot{l}^3 + a \sin \theta \sin \varphi \dot{m}^3 + a \cos \theta \dot{n}^3$$

$$a \cos \theta \cos \varphi \dot{l}^3 + a \cos \theta \sin \varphi \dot{m}^3 - a \sin \theta \dot{n}^3$$

$$-a \sin \theta \sin \varphi \dot{l}^3 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{m}^3$$

$$\ddot{x}^4 + a \dot{v}^4 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{l}^4 + a \sin \theta \sin \varphi \dot{m}^4 + a \cos \theta \dot{n}^4$$

$$a \cos \theta \cos \varphi \dot{l}^4 + a \cos \theta \sin \varphi \dot{m}^4 - a \sin \theta \dot{n}^4$$

$$-a \sin \theta \sin \varphi \dot{l}^4 + a \sin \theta \cos \varphi \dot{m}^4$$

$$+ \sin \varphi \dot{l}^4 + a \sin \theta \sin \varphi \dot{m}^4)$$

$$+ a \cos \theta \sin \varphi \dot{m}^4 - a \sin \theta \dot{n}^4)$$

$$+ \dot{l}^3 \dot{m}^4 (a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi)$$

$$+ \dot{m}^3 \dot{m}^4 (a^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - a^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\cos \varphi) + \dot{l}^3 \dot{n}^4 (-a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi)$$

Elemento de volumen del cono de
huz con vértice en $(T, 0, 0, 0)$ y
con ^{las} ecuaciones:

$$t = T + \rho$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$d\mathbf{v}_i = [\sin \theta, -\sin^2 \theta \cos \varphi, -\sin^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta]$$

Ver Cuaderno 12 $\rightarrow \rho^2 d\rho d\theta d\varphi$
página 38.

Gradiente del campo gravitacional
generado por un punto masa
instantáneamente en reposo en
el origen de un sistema de
coordenadas de un marco de
referencia inercial. (Cuaderno 4 pág 37)

$$V_k = \delta_k^1 \mathbf{e}$$

$$g_1 = t - T = \rho$$

$$V^1 = 1$$

$$g_2 = -\rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$V^2 = 0$$

$$g_3 = -\rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$V^3 = 0$$

$$g_4 = -\rho \cos \theta$$

$$V^4 = 0$$

$$\hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{V}} = \rho$$

$$\hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \rho [A^1 - A^2 \sin \theta \cos \varphi - A^3 \sin \theta \sin \varphi - A^4 \cos \theta]$$

$$\sin \theta - \sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$\sin \theta - \sin \theta [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta]$$

$$dv_i = [\sin\theta, -\sin^2\theta \cos\varphi, -\sin^2\theta \sin\varphi, -\sin\theta \cos\theta] g^2 dg d\theta d\varphi$$

$$V_j = [1, 0, 0, 0]$$

$$\hat{V} \cdot d\hat{V} = g^2 \sin\theta dg d\theta d\varphi$$

$$g^i = [g, g \sin\theta \cos\varphi, g \sin\theta \sin\varphi, g \cos\theta]$$

$$\hat{g} \cdot d\hat{V} = g^3 [\sin\theta - \sin^3\theta \cos^2\varphi - \sin^3\theta \sin^2\varphi - \sin\theta \cos^2\theta] dg d\theta d\varphi$$

~~$\frac{\hat{g} \cdot d\hat{V}}{g^2}$~~ ~~$\frac{1}{g} \cdot d\hat{V} = g^3 [$~~

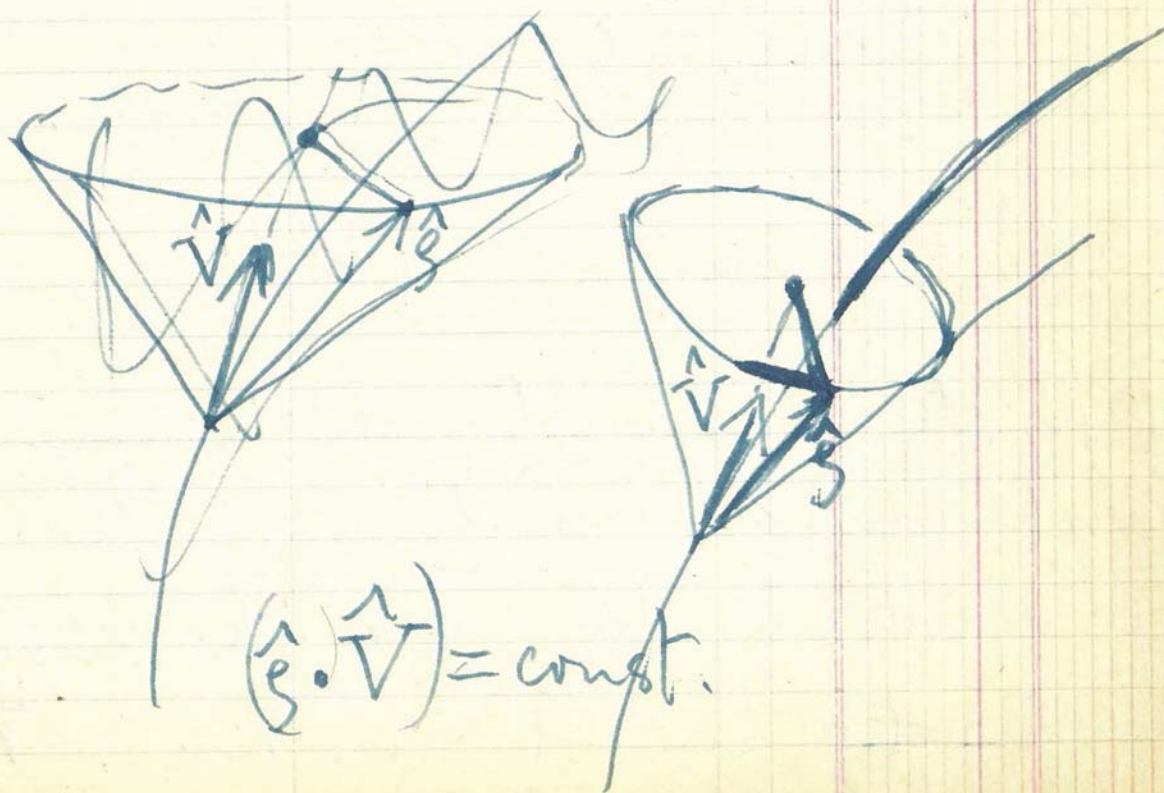
$$\hat{g} \cdot d\hat{V} = 0$$

$$\hat{V} \cdot d\hat{V} = g^2 \sin\theta dg d\theta d\varphi$$

Flujo del gradiente del campo gravitacional a través de la hipersuperficie del cono de luz con ~~centro en~~ vértice $u(T, 0, 0, 0)$

Flujo del gradiente del campo gravitacional a través del cono de luz del futuro. Se limita la hipersuperficie del cono de luz a aquella porción en la que la proyección de $\hat{g}$ sobre $\hat{V}$ es constante. El flujo es igual a:

$$\Phi_1 = -4\pi M (\hat{g} \cdot \hat{V}) [2V_j V_k - \Delta_{jk}].$$



y de extensión tal que la proyección del ~~segmento de~~ generatriz sobre ~~la~~ el cuadrado de velocidad sea $\mathcal{S}$.

$$\text{Flujo} = \Phi_1$$

$$\Phi_1 = - \frac{M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\mathcal{S} \sin \theta \, d\mathcal{S} \, d\theta \, d\varphi}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = +1 + 1 = 2$$

$$\Phi_1 = -M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}] \cdot 4\pi \mathcal{S}$$

$$\Phi_1 = -4\pi \mathcal{S} M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]$$

Flujo del pasado hacia el futuro?
(en la dirección de $\hat{\vec{V}}$) sobre la dirección del flujo ver pág. 22.

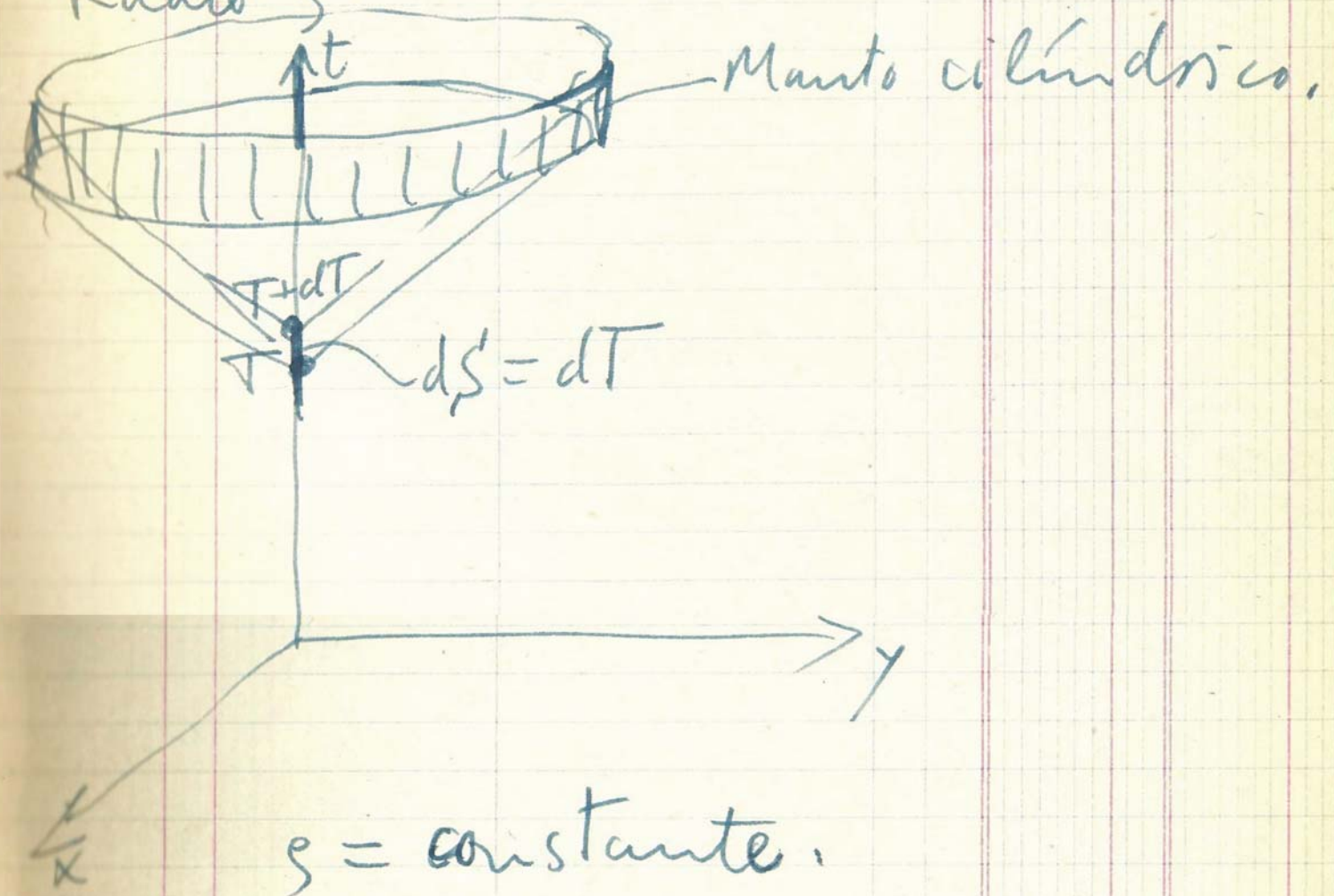
$$\Phi_1 = -4\pi(\hat{\vec{g}} \cdot \hat{\vec{V}}) M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]$$

del flujo
ver
pág. 22.

Ecuaciones del manto cilíndrico.

Eje del cilindro $\vec{V} = (1, 0, 0, 0)$.

Radio ρ .



$$\rho^1 = T + \rho;$$

$$\rho^2 = \rho \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\rho^3 = \rho \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\rho^4 = \rho \cos \theta.$$

Aquí $T = \rho^1$

$$dT = d\rho^1$$

dv

$\cos \theta$	0	0	0	$\rho^2 ds d\theta d\varphi$
0	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$	
0	$-\sin \theta \sin \varphi$	$\sin \theta \cos \varphi$	0	

$$dv_1 = 0 \quad dv_2 = -\sin^2 \theta \cos \varphi \int \rho^2 ds d\theta d\varphi$$

$$dv_3 = -\sin^2 \theta \sin \varphi \int \rho^2 ds d\theta d\varphi$$

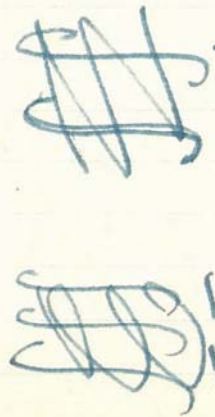
$$dv_4 = -\sin \theta \cos \theta \int \rho^2 ds d\theta d\varphi$$

$$dv_i = [0, -\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta] \int \rho^2 ds d\theta d\varphi$$

$$d\vec{v}_i = [0, -\sin\theta \cos\varphi, -\sin\theta \sin\varphi, -\cos\theta] \sin\theta \int \rho^2 d\rho d\theta d\varphi$$

$$\vec{g}' = [g, g \sin\theta \cos\varphi, g \sin\theta \sin\varphi, g \cos\theta]$$

$$\hat{g} \cdot d\hat{v} = -g^3 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\hat{g} \cdot d\hat{v}}{g^2} = -g \, d\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = +g \, d^2\Omega \cos\theta \Big|_0^{\pi} = -4\pi g \, d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\hat{g} \cdot d\hat{v}}{g^2} = -4\pi g \, d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\hat{s} \cdot d\hat{v}}{s^3} = -4\pi d\delta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\hat{s} \cdot \hat{A})(\hat{s} \cdot d\hat{v})}{s^3} = -d\delta \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [A^2 \sin\theta \cos\varphi - A^2 \sin\theta \sin\varphi - A^2 \cos\theta] \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\hat{s} \cdot \hat{A})(\hat{s} \cdot d\hat{v})}{s^3} = +\delta d\delta [-2A^2 \cdot 2\pi] = -4\pi\delta (\hat{v} \cdot \hat{A}) d\delta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\hat{s} \cdot \hat{A})(\hat{s} \cdot d\hat{v})}{s^3} = -4\pi\delta (\hat{v} \cdot \hat{A}) d\delta$$

Flujo a través del manto cilíndrico.

$$\Phi_{\pm 2} = \left[\begin{aligned} &2M[\vec{V}_j A_k + A_j V_k](-4\pi g dS) \\ &- M[2V_j V_k - \Delta_{jk}](-4\pi g)(\hat{\vec{V}} \cdot \hat{\vec{A}}) dS \\ &+ M[2V_j V_k - \Delta_{jk}](-4\pi dS) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_{hjk} = & \left[\frac{2M[\vec{V}_j \cdot \vec{A}_k + A_j \vec{V}_k]}{(\hat{\rho} \cdot \hat{V})^3} \hat{\rho} \right. \\
 & - \frac{M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{\rho} \cdot \hat{V})^3} (\hat{\rho} \cdot \hat{A}) \hat{\rho} \\
 & + \frac{M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{\rho} \cdot \hat{V})^3} \hat{\rho} \\
 & \left. - \frac{M[2\vec{V}_j \cdot \vec{V}_k - \Delta_{jk}]}{(\hat{\rho} \cdot \hat{V})^2} \hat{V} \right]
 \end{aligned}$$

Dirección del flujo

22

Elemento de volumen del cono de luz

$$dv_i = [\sin\theta, -\sin^2\theta \cos\varphi, -\sin^2\theta \sin\varphi, -2\sin\theta \cos\theta]$$

$$\rightarrow r^2 dr d\theta d\varphi$$

$$\hat{V}^i = [1, 0, 0, 0]$$

$$\hat{V}^i dv_i = \sin\theta (\hat{g} \cdot \hat{V})^2 dr d\theta d\varphi$$

$\hat{V}^i dv_i$ es positivo.

El flujo del cuadrivector $\hat{V}^1$
a través del cono de luz del
futuro $d\hat{V}^1$ es positivo.